

Wektor Jonesa

$$\vec{E} \equiv \begin{bmatrix} e_x \\ e_y \\ e_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_x \\ E_y \\ 0 \end{bmatrix} \exp[i(\omega t - kz)] = \begin{bmatrix} A_x \exp(i\delta_x) \\ A_y \exp(i\delta_y) \\ 0 \end{bmatrix} \exp[i(\omega t - kz)]$$

wektor Jonesa

$$\mathbf{E} \equiv \begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_x \\ E_y \end{bmatrix} = e^{i\omega t} \begin{bmatrix} A_x \\ A_y e^{i\delta} \end{bmatrix}$$

postać uproszczona

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} A_x \\ A_y e^{i\delta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_x e^{-i\delta} \\ A_y \end{bmatrix}$$

standardowy wektor Jonesa

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} \cos \beta \\ \sin \beta e^{i\delta} \end{bmatrix}$$

Wektor Jonesa

obliczanie natężenia oraz stanu polaryzacji światła

$$\mathbf{E} \equiv \begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \end{bmatrix} = a \begin{bmatrix} \cos \beta \\ \sin \beta e^{i\delta} \end{bmatrix}$$

natężenie $I = E_1 E_1^* + E_2 E_2^* = a a^*$

$$\frac{E_2}{E_1} = \tan \beta \cos \delta + i \tan \beta \sin \delta$$

$$\tan \delta = \frac{\operatorname{Im}\left(\frac{E_2}{E_1}\right)}{\operatorname{Re}\left(\frac{E_2}{E_1}\right)} \quad \tan \beta = \frac{\operatorname{Re}\left(\frac{E_2}{E_1}\right)}{\cos \delta} = \frac{\operatorname{Im}\left(\frac{E_2}{E_1}\right)}{\sin \delta}$$

Dodawanie wektorów

rozkład wektora Jonesa na sumę wektorów Jonesa fal liniowo spolaryzowanych

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} \cos \beta \\ \sin \beta e^{i\delta} \end{bmatrix} = \cos \beta \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \sin \beta \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} e^{i\delta}$$

rozkład wektora Jonesa fali liniowo spolaryzowanej
na sumę wektorów Jonesa fal kołowo spolaryzowanych

$$\mathbf{E}_l = \begin{bmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{bmatrix} = \frac{1}{2} e^{-i\alpha} \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix} + \frac{1}{2} e^{+i\alpha} \begin{bmatrix} 0 \\ -i \end{bmatrix}$$

dodawanie fal kołowo spolaryzowanych

$$\begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix} + e^{i\gamma} \begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 + e^{i\gamma} \\ i(1 - e^{i\gamma}) \end{bmatrix} = \frac{\cos \frac{\gamma}{2}}{1 + e^{i\gamma}} \begin{bmatrix} \cos \frac{\gamma}{2} \\ \sin \frac{\gamma}{2} \end{bmatrix}$$

Ponieważ składowe wektora Jonesa są składowymi wektora pola elektrycznego wektory Jonesa koherentnych fal MOŻNA dodawać do siebie

Macierz Jonesa

Założenia:

- ośrodek dwójłomny – płytka płasko równoległa, nieskończenie rozciągnięta w kierunku prostopadłym do kierunku padania fali świetlnej,
- fala świetlna – płaska, nieskończenie rozciągnięta w kierunku poprzecznym do kierunku propagacji.

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} j_{11} & j_{12} \\ j_{21} & j_{22} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{E} = \mathbf{J}\mathbf{E}_0$$

Wektory własne macierzy \mathbf{A} : $\mathbf{X}_{1,2} = \mathbf{A}\mathbf{X}_{f,s} \equiv \lambda_{f,s} \cdot \mathbf{X}_{f,s}$

Macierz Jonesa

Wyliczanie składowych macierzy Jonesa
(przykład – ośrodki liniowo dwójłomne):

Wektory własne macierzy Jonesa ośrodka liniowo dwójłomnego, niepochlaniającego

$$\mathbf{E}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad i \quad \mathbf{E}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{E}'_1 = \begin{bmatrix} j_{11} & j_{12} \\ j_{21} & j_{22} \end{bmatrix} \cdot \mathbf{E}_1 = \begin{bmatrix} j_{11} & j_{12} \\ j_{21} & j_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} j_{11} \\ j_{21} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{E}'_2 = \begin{bmatrix} j_{11} & j_{12} \\ j_{21} & j_{22} \end{bmatrix} \cdot \mathbf{E}_2 = \begin{bmatrix} j_{11} & j_{12} \\ j_{21} & j_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} j_{12} \\ j_{22} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{E}'_1 \equiv e^{i\gamma/2} \cdot \mathbf{E}_1 = \begin{bmatrix} e^{i\gamma/2} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{E}'_2 \equiv e^{-i\gamma/2} \cdot \mathbf{E}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ e^{-i\gamma/2} \end{bmatrix}$$

$$j_{11} = e^{i\gamma/2}, \quad j_{21} = 0$$

$$j_{22} = e^{-i\gamma/2}, \quad j_{12} = 0$$

$$\mathbf{J}_{\alpha=0} = \begin{bmatrix} e^{+i\gamma/2} & 0 \\ 0 & e^{-i\gamma/2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{-i\gamma} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{+i\gamma} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Macierz Jonesa

plytka obrócona

$$\mathbf{J}_\alpha = \mathbf{R}_\alpha \cdot \mathbf{J}_0 \cdot \mathbf{R}_{-\alpha} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \cdot \mathbf{J}_0 \cdot \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha \cdot e^{-i\gamma} & \sin \alpha \cdot \cos \alpha \cdot (1 - e^{-i\gamma}) \\ \sin \alpha \cdot \cos \alpha \cdot (1 - e^{-i\gamma}) & \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha \cdot e^{-i\gamma} \end{bmatrix}$$

Dichroiczny ośrodek eliptycznie dwójłomny w formalizmie Jonesa:

T_f - współczynnik transmisji fali szybszej,

T_s - współczynnik transmisji fali wolnej,

β_f - kąt przekątnej fali szybszej,

δ_f - kąt fazowy,

γ - różnica faz wnoszona przez ośrodek.

$$\mathbf{E} = \mathbf{J}(\mathbf{T}_f, \mathbf{T}_s, \beta_f, \delta_f, \gamma) \cdot \mathbf{E}_0$$

wektory własne ośrodka

β_f, δ_f

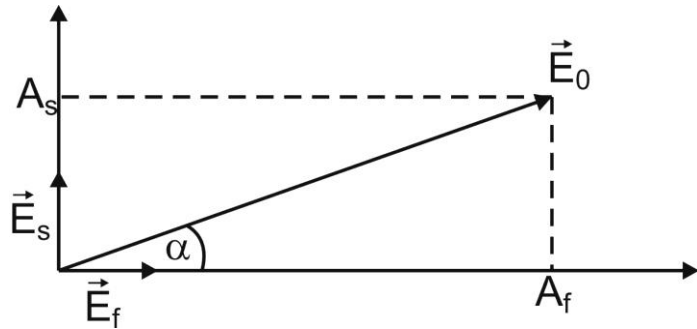
$$\mathbf{E}_f = \begin{bmatrix} \cos \beta_f \\ \sin \beta_f e^{i\delta_f} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{E}_f \cdot \mathbf{E}_s = 0$$

$\beta_s = \beta_f + 90^\circ, \delta_s = -\delta_f$

$$\mathbf{E}_s = \begin{bmatrix} -\sin \beta_f \\ \cos \beta_f e^{-i\delta_f} \end{bmatrix}$$

Podział fali padającej na fale własne ośrodka dwójłomnego



Dla ośrodka liniowo dwójłomnego
oraz liniowo spolaryzowanej fali padającej:

$$A_f = \vec{E}_0 \cdot \vec{E}_f = |\vec{E}_0| |\vec{E}_f| \cos \alpha = |\vec{E}_0| \cos \alpha$$

$$A_s = \vec{E}_0 \cdot \vec{E}_s = |\vec{E}_0| |\vec{E}_s| \sin \alpha = |\vec{E}_0| \sin \alpha$$

Gdy $\alpha=0^\circ$ lub 90° , w ośrodku rozchodzi się jedna fala o stanie polaryzacji takim jak fala wejściowa, zatem ośrodek ten nie zmienia stanu polaryzacji w tym przypadku.

Natężenia fal własnych

$$I_f = A_f^2 = I_0 \cdot \cos^2 \alpha$$

$$I_s = A_s^2 = I_0 \cdot \sin^2 \alpha$$

Wektor Jonesa za macierzą Jonesa

Wyliczenie wektora Jonesa światła za ośrodkiem dwójłomnym przy wykorzystaniu wektorów własnych ośrodka

na początku ośrodka ($z=0$) padająca fala rozdziela się na dwie fale własne ośrodka:

$$\mathbf{J}_0 = A_f \cdot \mathbf{J}_f + A_s \cdot \mathbf{J}_s = (\mathbf{J}_0 \cdot \mathbf{J}_f) \cdot \mathbf{J}_f + (\mathbf{J}_0 \cdot \mathbf{J}_s) \cdot \mathbf{J}_s$$

w ośrodku fale szybsza i wolniejsza rozchodzą się ze współczynnikami transmisji T_f i T_s oraz fala wolniejsza opóźniona jest w fazie względem fali szybszej o γ , co daje na końcu ośrodka dwie fale:

$$T_f (A_f \cdot \mathbf{J}_f) \quad T_s (A_s \cdot \mathbf{J}_s) e^{-i\gamma}$$

za ośrodkiem te dwie fale dodają się i wektor Jonesa \mathbf{J} światła wyjściowego dany jest przez:

$$\mathbf{J} = T_f \cdot A_f \cdot \mathbf{J}_f + T_s \cdot A_s \cdot e^{-i\gamma} \cdot \mathbf{J}_s$$

Wektor Stokesa

$$V \equiv \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ V_4 \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} \langle m_x^2(t) + m_y^2(t) \rangle_t \\ \langle m_x^2(t) - m_y^2(t) \rangle_t \\ \langle 2m_x(t)m_y(t)\cos\delta(t) \rangle_t \\ \langle 2m_x(t)m_y(t)\sin\delta(t) \rangle_t \end{bmatrix}$$

Światło całkowicie niespolaryzowane

$$V = \begin{bmatrix} I \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = I \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

I - natężenie światła

Światło całkowicie spolaryzowane

$$V = I \begin{bmatrix} 1 \\ M \\ C \\ S \end{bmatrix}$$

$$M = \cos 2\alpha \cos 2\vartheta$$

$$C = \sin 2\alpha \cos 2\vartheta$$

$$S = \sin 2\vartheta$$

Wektor Stokesa

Dla światła częściowo spolaryzowanego

$$V = \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ V_4 \end{bmatrix} = I_s \begin{bmatrix} 1 \\ M \\ C \\ S \end{bmatrix} + I_n \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_s + I_n \\ I_s M \\ I_s C \\ I_s S \end{bmatrix}$$

stopień polaryzacji światła $p = \frac{I_s}{I}$

$$V = I \begin{bmatrix} 1 \\ pM \\ pC \\ pS \end{bmatrix} = I \begin{bmatrix} 1 \\ p \cos 2\vartheta \cos 2\alpha \\ p \cos 2\vartheta \sin 2\alpha \\ p \sin 2\vartheta \end{bmatrix}$$

Wektor Stokesa

Przykłady

światło naturalne

$$V = I \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

światło liniowo spolaryzowane

$$V = I \begin{bmatrix} 1 \\ \cos 2\alpha \\ \sin 2\alpha \\ 0 \end{bmatrix}$$

światło kołowo spolaryzowane

$$V = I \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \pm 1 \end{bmatrix}$$

Wektor Stokesa

Obliczanie właściwości światła

natężenie $I = V_1$

stopień polaryzacji $p = \frac{\sqrt{V_2^2 + V_3^2 + V_4^2}}{V_1}$

kąt azymutu $\tan 2\alpha = \frac{V_3}{V_2}$

kąt eliptyczności $\sin 2\vartheta = \frac{V_4}{\sqrt{V_2^2 + V_3^2 + V_4^2}}$

Macierz Muellera-Ścierskiego

macierz 4x4 wiążąca wektor Stokesa światła opuszczającego ośrodek z wektorem Stokesa światła padającego na ośrodek

$$V = \mathbf{M}(\mathbf{T}_f, \mathbf{T}_s, \alpha_f, \mathcal{G}_f, \gamma) \cdot V_0$$

Dichroiczny ośrodek eliptycznie dwójłomny :

T_f - współczynnik transmisji fali szybszej,

T_s - współczynnik transmisji fali wolnej,

α_f - kąt azymutu fali szybszej,

\mathcal{G}_f - kąt eliptyczności fali szybszej,

γ - różnica faz wnoszona przez ośrodek

Wektory własne ośrodka

pierwszy

$$V_f = \begin{bmatrix} 1 \\ \cos 2\alpha_f \cos 2\vartheta_f \\ \sin 2\alpha_f \cos 2\vartheta_f \\ \sin 2\vartheta_f \end{bmatrix}$$

drugi: $\alpha_s = \alpha_f + 90^\circ$, $\vartheta_s = -\vartheta_f$

$$V_s = \begin{bmatrix} 1 \\ -\cos 2\alpha_f \cos 2\vartheta_f \\ -\sin 2\alpha_f \cos 2\vartheta_f \\ -\sin 2\vartheta_f \end{bmatrix}$$

$$V_f \cdot V_s = 0$$

Macierz Ścierskiego-Mueller'a

Przykłady

Ośrodek niedichroiczny liniowo dwójtomy

$$\mathbf{M} = T^2 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & M^2(1-X) + X & MC(1-X) & -YC \\ 0 & MC(1-X) & C^2(1-X) + X & YM \\ 0 & YC & -YM & X \end{bmatrix}$$

$$M = \cos 2\alpha_f, C = \sin 2\alpha_f, X = \cos \gamma, Y = \sin \gamma$$

Ośrodek niedichroiczny kołowo dwójtomy

$$\mathbf{M} = T^2 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & X & \pm Y & 0 \\ 0 & \mp Y & X & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Macierze obrotu

$$\alpha_f = 0$$

$$\mathbf{M} = T^2 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & X & Y \\ 0 & 0 & -Y & X \end{bmatrix}$$

$$\alpha_f = 45^\circ$$

$$\mathbf{M} = T^2 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & X & 0 & -Y \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & Y & 0 & X \end{bmatrix}$$

Doskonały polaryzator $\alpha_f = 0^\circ$

$$\mathbf{M} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Macierz Ścierskiego-Muellera

Przykład zastosowania

światło naturalne ($p=0$) pada na liniowy polaryzator z kątem azymutu α_p a następnie na liniową ćwierćfalówkę z kątem azymutu α_c

$$V = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & * \\ 0 & \cos^2 2\alpha_c & \cos 2\alpha_c \sin 2\alpha_c & * \\ 0 & \cos 2\alpha_c \sin 2\alpha_c & \sin^2 2\alpha_c & * \\ 0 & \sin 2\alpha_c & -\cos 2\alpha_c & * \end{bmatrix} \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & * & * & * \\ \cos 2\alpha_p & * & * & * \\ \sin 2\alpha_p & * & * & * \\ 0 & * & * & * \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$V = T^2 \begin{bmatrix} 1 & & & \\ \cos 2\alpha \cdot \cos 2\vartheta & & & \\ \sin 2\alpha \cdot \cos 2\vartheta & & & \\ \sin 2\vartheta & & & \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & & & \\ \cos 2\alpha_c \cdot \cos 2(\alpha_c - \alpha_p) & & & \\ \sin 2\alpha_c \cdot \cos 2(\alpha_c - \alpha_p) & & & \\ \sin 2(\alpha_c - \alpha_p) & & & \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{cases} \alpha = \alpha_c \\ \vartheta = \alpha_c - \alpha_p \end{cases}$$