

Ośrodki eliptycznie dwójłomne

$$\vec{\mathcal{D}} = \bar{\epsilon} \vec{E} + i\epsilon_0 (\vec{G} \times \vec{E})$$

wektor obrotowy $\vec{G} = \bar{g} \hat{s}$

symetryczny tensor skręcenia $\bar{g}$

układ trójskośny

$$\begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ & g_{22} & g_{23} \\ & & g_{33} \end{bmatrix}$$

układ tetragonalny

$$\begin{bmatrix} g_{11} & 0 & 0 \\ & g_{11} & 0 \\ & & g_{33} \end{bmatrix}$$

ośrodek izotropowy

$$\begin{bmatrix} g_{11} & 0 & 0 \\ & g_{11} & 0 \\ & & g_{11} \end{bmatrix}$$

Ośrodki eliptycznie dwójłomne

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_x - n^2(1-s_x^2) & n^2 s_x s_y - iG_z & n^2 s_x s_z + iG_y \\ n^2 s_x s_y + iG_z & \varepsilon_y - n^2(1-s_y^2) & n^2 s_y s_z - iG_x \\ n^2 s_x s_z - iG_y & n^2 s_y s_z + iG_x & \varepsilon_z - n^2(1-s_z^2) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{bmatrix} = 0$$

$$\det \begin{vmatrix} n_x^2 - n^2(1-s_x^2) & n^2 s_x s_y - iG_z & n^2 s_x s_z + iG_y \\ n^2 s_x s_y + iG_z & n_y^2 - n^2(1-s_y^2) & n^2 s_y s_z - iG_x \\ n^2 s_x s_z - iG_y & n^2 s_y s_z + iG_x & n_z^2 - n^2(1-s_z^2) \end{vmatrix} = 0$$

$$n^4 - An^2 + B = 0$$

$$A = \frac{s_x^2 \varepsilon_x (\varepsilon_y + \varepsilon_z) + s_y^2 \varepsilon_y (\varepsilon_x + \varepsilon_z) + s_z^2 \varepsilon_z (\varepsilon_x + \varepsilon_y) - |\hat{s} \times \vec{G}|^2}{s_x^2 \varepsilon_x + s_y^2 \varepsilon_y + s_z^2 \varepsilon_z}$$

$$B = \frac{\varepsilon_x \varepsilon_y \varepsilon_z - (G_x^2 \varepsilon_x + G_y^2 \varepsilon_y + G_z^2 \varepsilon_z)}{s_x^2 \varepsilon_x + s_y^2 \varepsilon_y + s_z^2 \varepsilon_z}$$

Ośrodki eliptycznie dwójłomne

gdy ośrodek jest liniowy wówczas istnieją dwa rozwiązania tego równania

$$\vec{G} = 0 \longrightarrow n_{01}, n_{02}$$

$$(n^2 - n_{01}^2)(n^2 - n_{02}^2) = \frac{\varepsilon_x G_x^2 + \varepsilon_y G_y^2 + \varepsilon_z G_z^2 - n^2 |\hat{s} \times \vec{G}|^2}{\varepsilon_x s_x^2 + \varepsilon_y s_y^2 + \varepsilon_z s_z^2} = T^2$$

T – tzw. skalarny parametr obrotu. Sens tego parametru

$$\varepsilon_x = \varepsilon_y = \varepsilon_z = n^2 \Rightarrow T^2 = |\vec{G}|^2 - |\hat{s} \times \vec{G}|^2 = (\vec{G} \cdot \hat{s})^2 = G^2 \cdot \cos^2 \angle(\vec{G}, \hat{s})$$

Ośrodki eliptycznie dwójłomne

Dwa rozwiązania

$$n_{1,2}^2 = \frac{1}{2} \left(n_{01}^2 + n_{02}^2 \pm \sqrt{(n_{01}^2 - n_{02}^2)^2 + 4T^2} \right)$$

Fale biegnące w kierunkach zgodnych z osiami binormalnymi  $n_{01} = n_{02} = n_0$

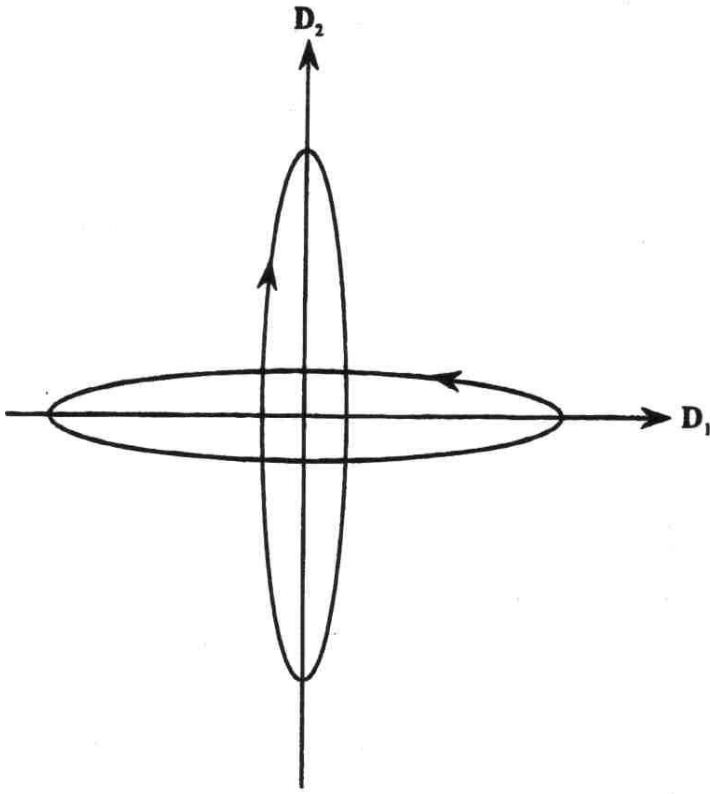
$$n_1 = \sqrt{n_0^2 + T}$$

$$n_2 = \sqrt{n_0^2 - T}$$

W ośrodkach anizotropowych wzdłuż osi binormalnej rozchodzą się dwie fale z różnymi prędkościami, a więc taki ośrodek nie jest już liniowo dwójłomny

Eliptyczność fal własnych

Ponieważ w równaniu materiałowym pojawiają się liczby zespolone, to wektory własne równania (*) mają składowe zespolone, a zatem składowe wektorów $\vec{D}_{1,2}$ własnych indukcji są zespolone, co oznacza, że wektory te reprezentują fale eliptycznie spolaryzowane



eliptyczność fal własnych e

$$e = \frac{2T}{(n_{01}^2 - n_{02}^2) + \sqrt{(n_{01}^2 - n_{02}^2)^2 + 4T^2}}$$

Fale własne w ośrodku eliptycznie dwójłomnym

$$\begin{aligned}\vec{D}_1 &= \cos \gamma_1 \cdot \hat{x} + e \cdot \sin \gamma_1 \cdot \hat{y} \\ \vec{D}_2 &= e \cdot \sin \gamma_2 \cdot \hat{x} + \cos \gamma_2 \cdot \hat{y}\end{aligned}\quad \vec{D} = \vec{D}_1 + \vec{D}_2 = \begin{bmatrix} \cos \gamma_1 + e \cdot \sin \gamma_2 \\ e \cdot \sin \gamma_1 + \cos \gamma_2 \end{bmatrix}$$

$$\vec{D}(0) = \vec{D}_1(0) + \vec{D}_2(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \tan(45^\circ - \Gamma) = \frac{D_y}{D_x} = \frac{\cos \gamma_2 + e \cdot \sin \gamma_1}{\cos \gamma_1 + e \cdot \sin \gamma_2}$$

Wniosek: gdy ośrodek jest eliptycznie dwójłomny ($e \neq 0$) to wypadkowy wektor indukcji dielektrycznej światła po przejściu przez ośrodek drga pod innym kątem względem osi X układu współrzędnych niż w przypadku ośrodka liniowo dwójłomnego ($e=0$).

Ośrodki kołowo dwójłomne

$$e = 1$$

$$\tan(45^\circ - \Gamma) = \frac{1 - \tan \Gamma}{1 + \tan \Gamma} = \frac{\sin \gamma_1 + \cos \gamma_2}{\cos \gamma_1 + \sin \gamma_2} = \frac{1 - \tan(\gamma/2)}{1 + \tan(\gamma/2)}$$

$$\gamma = \gamma_2 - \gamma_1$$

$$\gamma_1 = 2\pi d n_1 / \lambda$$

$$\gamma_2 = 2\pi d n_2 / \lambda$$

$$\Gamma = \frac{\pi d}{\lambda} (n_2 - n_1) = \frac{\gamma}{2}$$

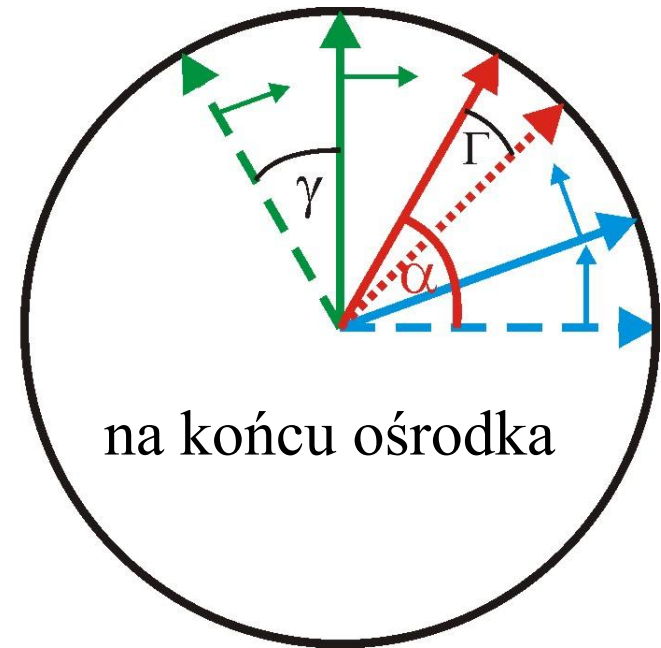
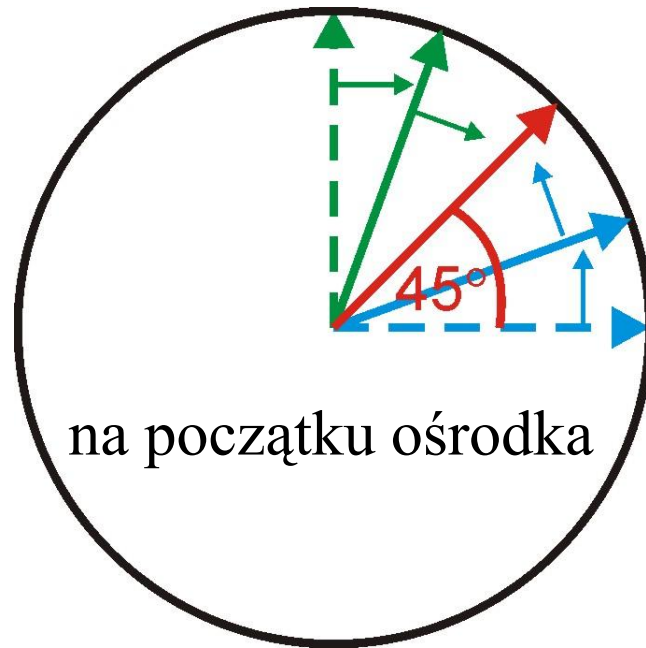
kąt Γ - zmiana kąta azymutu stanu polaryzacji światła (nie mylić z żargonowym skrótem – kąt skręcenia płaszczyzny polaryzacji światła !)

Ośrodki kołowo dwójłomne zmieniają kąt azymutu stanu polaryzacji światła wejściowego BEZ zmiany jego kąta eliptyczności.

$$\alpha' = \alpha + \Gamma$$

$$\mathcal{G}' = \mathcal{G}$$

Ośrodki kołowo dwójłomne



$$\Delta\alpha = \Gamma = \frac{\gamma}{2}$$

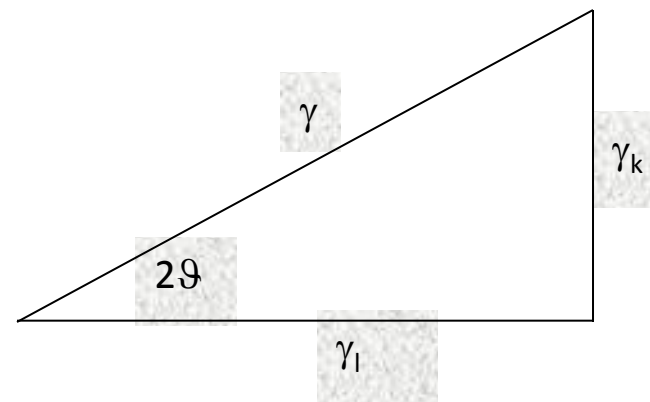
Zasada superpozycji różnicy faz

$$n_1^2 = \frac{1}{2} \left(n_{01}^2 + n_{02}^2 + \sqrt{(n_{01}^2 - n_{02}^2)^2 + 4T^2} \right)$$

$$n_2^2 = \frac{1}{2} \left(n_{01}^2 + n_{02}^2 - \sqrt{(n_{01}^2 - n_{02}^2)^2 + 4T^2} \right)$$

$$(\Delta n)^2 = (n_2 - n_1)^2 \cong (n_{01} - n_{02})^2 + \frac{T^2}{n_{01}n_{02}}$$

$$\gamma^2 = \gamma_l^2 + \gamma_k^2$$



$$\tan(2\vartheta) = \frac{\gamma_k}{\gamma_l} = \frac{T}{n_0 \cdot \Delta n_0}$$

Uwaga: dwójłomność liniowa nie musi występować w kierunku prostopadłym do osi optycznej (przykład – kwarc)