

Wektory własne

$$\vec{E} = \begin{bmatrix} \frac{s_x}{n^2 - n_x^2} \\ \frac{s_y}{n^2 - n_y^2} \\ \frac{s_z}{n^2 - n_z^2} \end{bmatrix} \quad \vec{D} = \varepsilon_0 \begin{bmatrix} n_x^2 & 0 & 0 \\ 0 & n_y^2 & 0 \\ 0 & 0 & n_z^2 \end{bmatrix} \vec{E} = \varepsilon_0 \begin{bmatrix} \frac{s_x n_x^2}{n^2 - n_x^2} \\ \frac{s_y n_y^2}{n^2 - n_y^2} \\ \frac{s_z n_z^2}{n^2 - n_z^2} \end{bmatrix}$$

$$\vec{E}_1 \cdot \vec{E}_2 = 0$$

$$\vec{D}_1 \cdot \vec{D}_2 = 0$$

$$\hat{s}_1 \neq \vec{p}_1$$

$$\hat{s}_2 \neq \vec{p}_2$$

Propagacja wzdłuż osi X

$$\hat{s} = (1,0,0) \quad \begin{bmatrix} n_x^2 & 0 & 0 \\ 0 & n_y^2 - n^2 & 0 \\ 0 & 0 & n_z^2 - n^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{bmatrix} = 0$$

$$n_x^2 (n_y^2 - n^2) (n_z^2 - n^2) = 0$$

$$n_1 = n_y$$

$$\begin{cases} n_x^2 \cdot E_x = 0 \\ 0 \cdot E_y = 0 \\ (n_z^2 - n_y^2) E_z = 0 \end{cases}$$

$$\vec{E}_1 = (0,1,0)$$

$$n_2 = n_z$$

$$\begin{cases} n_x^2 \cdot E_x = 0 \\ (n_y^2 - n_z^2) E_y = 0 \\ 0 \cdot E_z = 0 \end{cases}$$

$$\vec{E}_2 = (0,0,1)$$

$$\Delta n = n_z - n_y$$

Sens głównych współczynników załamania

n_x, n_y, n_z

Współczynniki załamania i amplitudy fal rozchodzących się
wzdłuż osi głównych kryształu liniowo dwójłomnego

Kierunek propagacji fali	$E=(1,0,0)$	$E=(0,1,0)$	$E=(0,0,1)$
X	-	n_y	n_z
Y	n_x	-	n_z
Z	n_x	n_y	-

Propagacja w płaszczyźnie X-Z

konwencja: $n_x < n_y < n_z$

$$n_1 = n_y$$

$$\vec{E}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

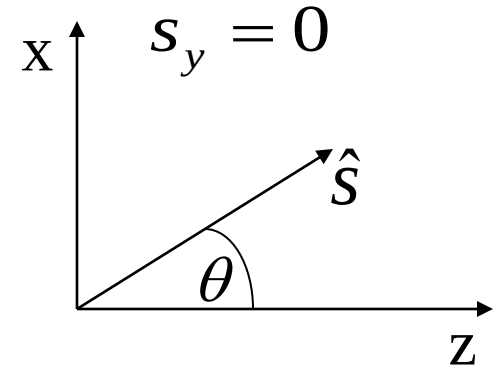
$$n_2 = \left(\frac{s_z^2}{n_x^2} + \frac{s_x^2}{n_z^2} \right)^{-1/2}$$

$$\vec{E}_2 = \begin{bmatrix} n_z^2 s_z \\ 0 \\ -n_x^2 s_x \end{bmatrix}$$

$$\Delta n = |n_2 - n_1|$$

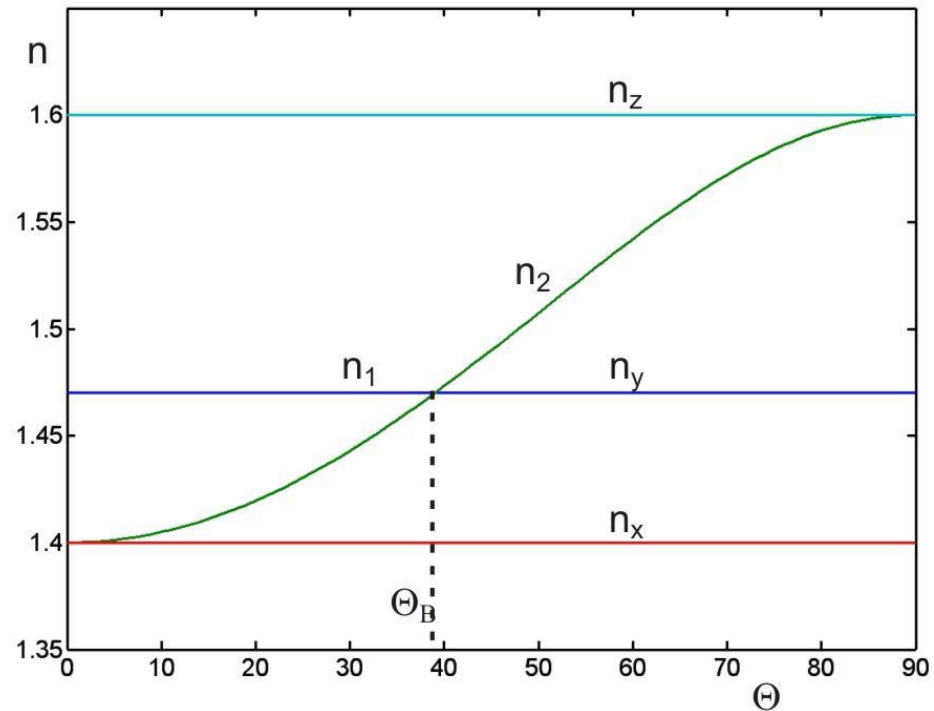
$$\theta = 0 \Rightarrow n_2 = n_x < n_1 = n_y$$

$$\theta = 90^\circ \Rightarrow n_2 = n_z > n_1 = n_y$$



$$\frac{1}{n_2^2} = \cos^2 \theta \frac{1}{n_x^2} + \sin^2 \theta \frac{1}{n_z^2}$$

$$s_y = 0$$



$$\Delta n = 0 \Leftrightarrow \tan \theta_B = \pm \frac{n_z}{n_x} \sqrt{\frac{n_y^2 - n_x^2}{n_z^2 - n_y^2}} \quad \text{oś binormalna}$$

Ośrodki:

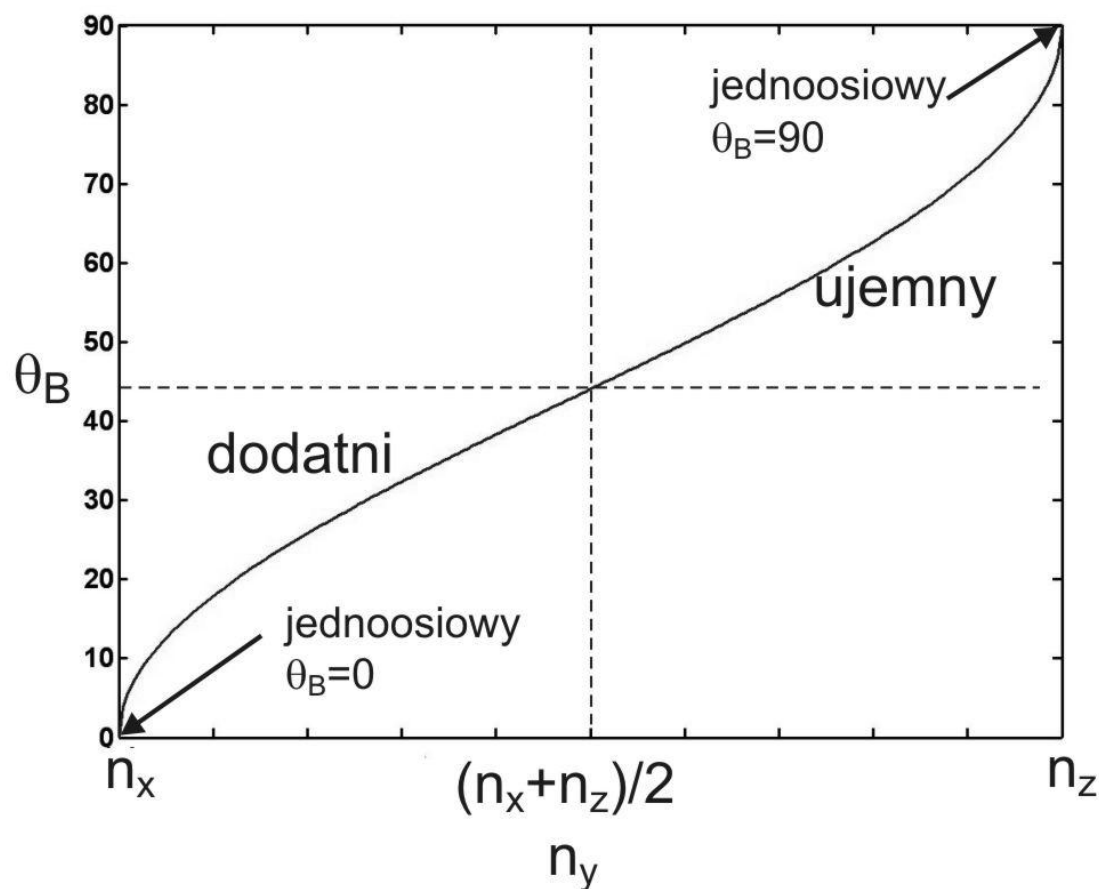
a) dwuosiowe

$$n_x < n_y < n_z$$

b) jednoosiowe $(n_x = n_y < n_z) \vee (n_x < n_y = n_z)$

Znak kryształu

konwencja: $n_x < n_y < n_z$



Znak kryształu

Ośrodek dwuosiowy

Znak	Warunek	Wniosek
+	$n_y - n_x < n_z - n_y$	$0^\circ < \theta_B < 45^\circ$
-	$n_y - n_x > n_z - n_y$	$45^\circ < \theta_B < 90^\circ$

Ośrodek jednoosiowy

Znak	Warunek	Wniosek
+	$n_x = n_y < n_z$	$\theta_B = 0^\circ$
-	$n_x < n_y = n_z$	$\theta_B = 90^\circ$

Ośrodki jednoosiowe dodatnie

$$n_x = n_y < n_z \quad \theta_B = 0^\circ$$

$$\vec{E}_o = \begin{bmatrix} s_y \\ -s_x \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\vec{E}_e = \begin{bmatrix} \frac{s_x}{n_e^2 - n_x^2} \\ \frac{s_y}{n_e^2 - n_y^2} \\ \frac{s_z}{n_e^2 - n_z^2} \end{bmatrix}$$

$$\vec{D}_o = \varepsilon_0 \varepsilon \vec{E}_o = \varepsilon_0 \begin{bmatrix} n_x^2 & 0 & 0 \\ 0 & n_x^2 & 0 \\ 0 & 0 & n_z^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_x \\ -s_y \\ 0 \end{bmatrix} = \varepsilon_0 n_x^2 \vec{E}_o$$

$$\vec{D}_e = \varepsilon_0 \varepsilon \vec{E}_e = \varepsilon_0 \begin{bmatrix} n_x^2 & 0 & 0 \\ 0 & n_x^2 & 0 \\ 0 & 0 & n_z^2 \end{bmatrix} \vec{E}_e$$

$$\vec{D}_o \parallel \vec{E}_o \Leftrightarrow \hat{s}_o = \vec{p}_o$$

$$\vec{D}_e \neq \vec{E}_e \Leftrightarrow \hat{s}_e \neq \vec{p}_e$$

Ośrodki jednoosiowe dodatnie

$$s_z = 0$$

$$n_o = n_x = n_y \quad n_e = n_z$$

$$\vec{E}_o = \begin{bmatrix} s_y \\ -s_x \\ 0 \end{bmatrix} \quad \vec{E}_e = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\Delta n = n_z - n_x$$

$$s_z = 1$$

$$n_o = n_x = n_y \quad n_e = n_x = n_y$$

$$\vec{E}_o = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \vec{E}_e = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Delta n = 0$$

Ośrodki jednoosiowe dodatnie

$$s_y = 0$$

$$n_o = n_x = n_y \qquad n_e = \left(\frac{s_z^2}{n_x^2} + \frac{s_x^2}{n_z^2} \right)^{-1/2}$$

$$n_o = n_x = n_y \qquad n_y \leq n_e \leq n_z$$

$$n_o \leq n_e$$

$$\vec{E}_o = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\vec{E}_e = \begin{bmatrix} n_z^2 s_z \\ 0 \\ -n_x^2 s_x \end{bmatrix}$$

$$0 \leq \Delta n = n_e - n_o \leq n_z - n_x$$

Znak kryształu jednoosiowego

Ośrodek dwuosiowy

Znak	Warunek	Wniosek
+	$n_y - n_x < n_z - n_y$	$0^\circ < \theta_B < 45^\circ$
-	$n_y - n_x > n_z - n_y$	$45^\circ < \theta_B < 90^\circ$

Ośrodek jednoosiowy

Znak	Warunek	Wniosek	Fale
+	$n_x = n_y < n_z$	$n_o < n_e$ $\theta_B = 0^\circ$	$n_f = n_o$ $n_s = n_e$
-	$n_x < n_y = n_z$	$n_o > n_e$ $\theta_B = 90^\circ$	$n_f = n_e$ $n_s = n_o$

Klasyfikacja współczynników załamania w ośrodkach liniowo dwójłomnych

n_x, n_y, n_z – główne współczynniki załamania kryształu

n_f, n_s – współczynniki załamania fal w kryształach ogólnie

n_o – współczynnik załamania fali zwyczajnej

n_e – współczynnik załamania fali nadzwyczajnej

Klasyfikacja ośrodków i fal w ośrodkach liniowo dwójłomnych

ośrodek dwuosiowy

$$\theta_{B1} = -\theta_{B2} \neq 0^\circ \Leftrightarrow n_x \neq n_y \neq n_z$$

$$„n_f” = „n_e”$$

$$„n_s” = „n_e”$$

ośrodek jednoosiowy dodatni

$$\theta_B = 0^\circ \Leftrightarrow n_x = n_y < n_z$$

$$n_f = n_o$$

$$n_s = n_e$$

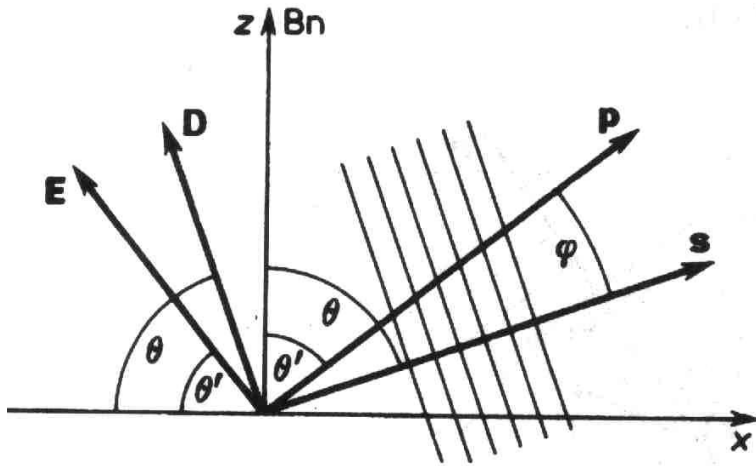
ośrodek jednoosiowy ujemny

$$\theta_B = 90^\circ \Leftrightarrow n_x < n_y = n_z$$

$$n_f = n_e$$

$$n_s = n_o$$

Propagacja czoła fali a propagacja energii dla fali nadzwyczajnej ośrodka jednoosiowego

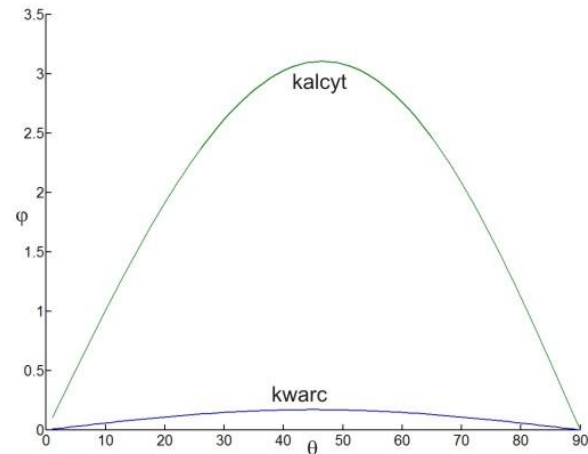


$$\tan \vartheta' = \frac{E_z}{E_x}, \quad \tan \vartheta = \frac{D_z}{D_x}$$

$$D_x = \varepsilon_0 \varepsilon_x E_x$$

$$D_z = \varepsilon_0 \varepsilon_z E_z$$

$$\tan \vartheta' = \frac{n_x^2}{n_z^2} \tan \vartheta \Rightarrow \varphi = \vartheta - \vartheta'$$



Prędkość propagacji energii fali - współczynnik załamania promienia

Gęstość energii w pola elektrycznego i magnetycznego
płaskiej fali elektromagnetycznej

$$w = 0.5\vec{E} \cdot \vec{D} + 0.5\vec{H} \cdot \vec{B} = \frac{n}{c} \hat{s} \cdot (\vec{E} \times \vec{H}) = \frac{n}{c} \hat{s} \cdot \vec{P} = \frac{n}{c} |\vec{P}| \cos \varphi$$

Z drugiej strony wartość wektora Poyntinga z definicji wynosi

$$|\vec{P}| = wv_P = w \frac{c}{n_P}$$

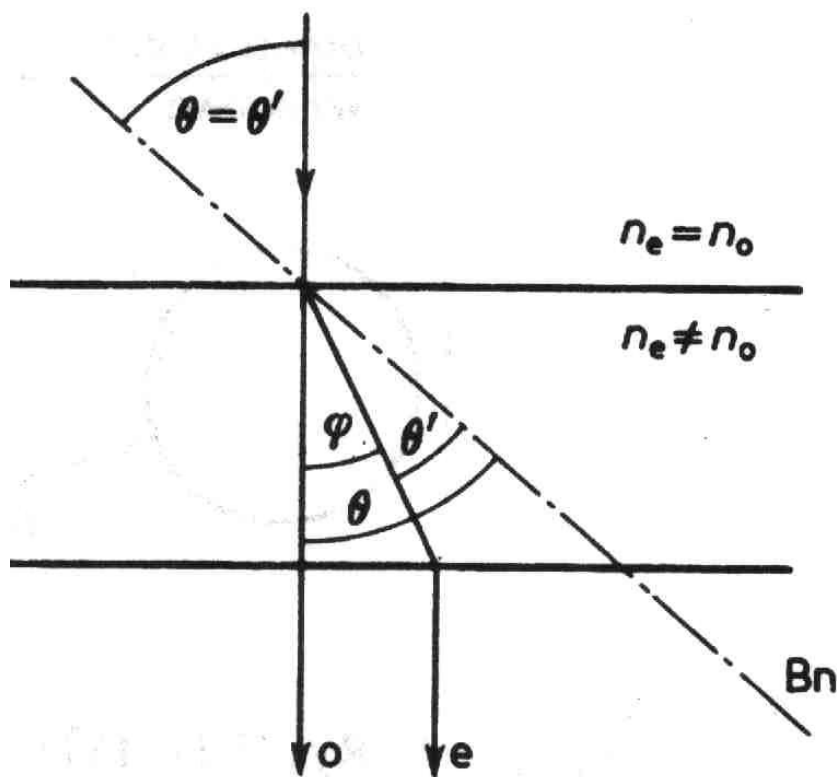
Zatem

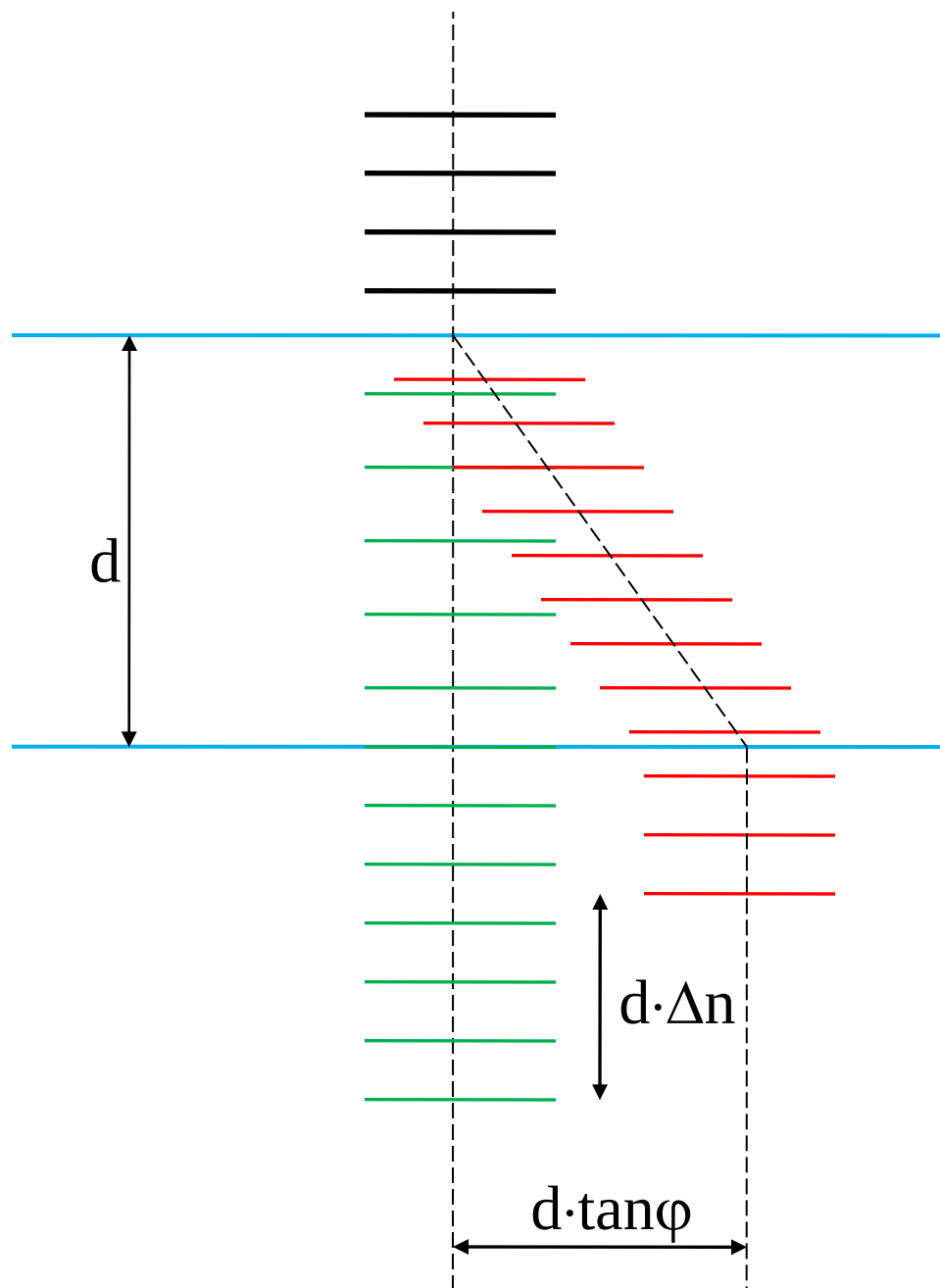
$$n_P = n_r = n \cdot \cos \varphi$$

Co to oznacza?

$$v_P = \frac{v}{\cos \varphi} \geq v$$

Prostopadłe padanie fali na płytkę kryształu jednoosiowego

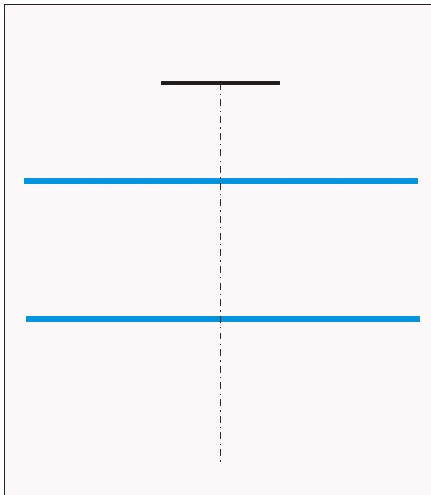




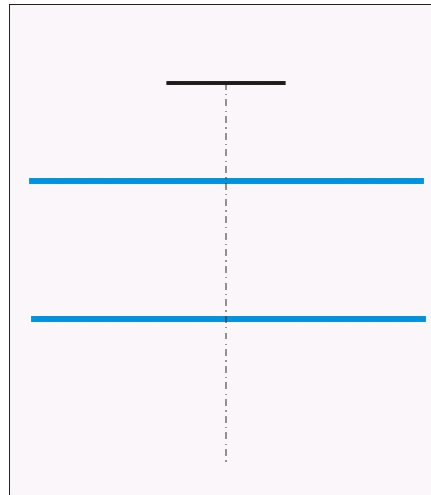
Prostopadłe padanie fali na płytkę kryształu jednoosiowego

oś optyczna kryształu

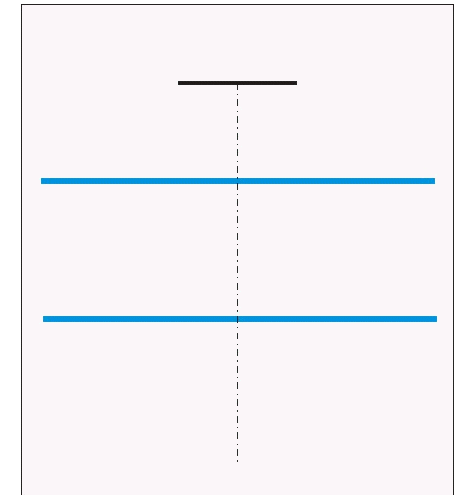
równoległa



skośna



prostopadła



rozsuniecie podłużne: **NIE**
rozsuniecie poprzeczne: **NIE**
dwójłomność: **NIE**

rozsuniecie podłużne: **TAK**
rozsuniecie poprzeczne: **TAK**
dwójłomność: **TAK**

rozsuniecie podłużne: **TAK**
rozsuniecie poprzeczne: **NIE**
dwójłomność: **TAK**