Równania Maxwella

$$rot\vec{\mathcal{H}} - \dot{\vec{\mathcal{D}}} = \sigma\vec{\mathcal{E}}$$

$$div\vec{\mathcal{D}} = \rho$$

$$rot\vec{\mathcal{E}} + \dot{\vec{\mathcal{B}}} = 0$$

$$div\vec{\mathcal{B}} = 0$$

$\vec{\mathcal{E}}$

$\vec{\mathcal{H}}$

$\vec{\mathcal{D}}$

$\vec{\mathcal{B}}$

ρ

σ

Równania materiałowe

ośrodki izotropowe

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \varepsilon \vec{E} \qquad \varepsilon = n^2 \qquad \bar{\varepsilon} = \begin{pmatrix} n^2 & 0 & 0 \\ 0 & n^2 & 0 \\ 0 & 0 & n^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon \end{pmatrix}$$

ośrodki liniowo dwójłomne

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \bar{\varepsilon} \vec{E} \qquad \bar{\varepsilon} = \begin{pmatrix} n_x^2 & 0 & 0 \\ 0 & n_y^2 & 0 \\ 0 & 0 & n_z^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon_x & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_y & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_z \end{pmatrix}$$

ośrodki eliptycznie dwójłomne

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \bar{\varepsilon} \vec{E} + i\varepsilon_0 \left(\vec{G} \times \vec{E} \right)$$

$\vec{G} = \bar{g}\hat{s}$ wektor obrotowy

$\bar{g}$ symetryczny tensor skręcenia

Ośrodki liniowo dwójłomne

Założenia: ρ=0, σ=0

$$rot\vec{\mathcal{E}} = -\dot{\vec{\mathcal{B}}} = -\mu\dot{\vec{\mathcal{H}}}$$

$$rot\vec{\mathcal{H}} = \dot{\vec{\mathcal{D}}} = \bar{\varepsilon}\dot{\vec{\mathcal{E}}}$$

Płaska fala świetlna

$$\begin{cases} \vec{\mathcal{E}}(\vec{r},t) = \vec{E}\exp\left[i\left(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r}\right)\right] \\ \vec{\mathcal{H}}(r,t) = \vec{H}\exp\left[i\left(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r}\right)\right] \end{cases}$$

gdzie $\vec{k} = \omega\frac{n}{c}\hat{s} = \frac{\omega}{V}\hat{s}$ $\quad V = \frac{c}{n}$

Co jest znane?
-długość fali λ
- kierunek propagacji fali $\hat{s}$
- kryształ $\bar{\varepsilon}\left(n_x, n_y, n_z\right)$

Co jest nieznane?
- ile jest fal w danym kierunku $\hat{s}$?
- jakie są ich prędkości, czyli n?
- jaka jest ich amplituda $\vec{E} = \left(E_x, E_y, E_z\right)$

Ośrodki liniowo dwójłomne - rozwiązania

Wstawiając równania fal płaskich do równań Maxwella dostaje się:

$$\begin{cases} \vec{k} \times \vec{E} = \omega\mu\vec{H} \\ \vec{k} \times \vec{H} = -\omega\bar{\varepsilon}\vec{E} = -\omega\vec{D} \end{cases}$$

$$\begin{cases} n\hat{s} \times \vec{E} = \mu c\vec{H} \\ n\hat{s} \times \vec{H} = -c\bar{\varepsilon}\vec{E} = -c\vec{D} \end{cases}$$

Ośrodki liniowo dwójłomne

$$\vec{D} \perp \hat{s} \quad \vec{D} \perp \vec{H} \quad \vec{H} \perp \hat{s}$$

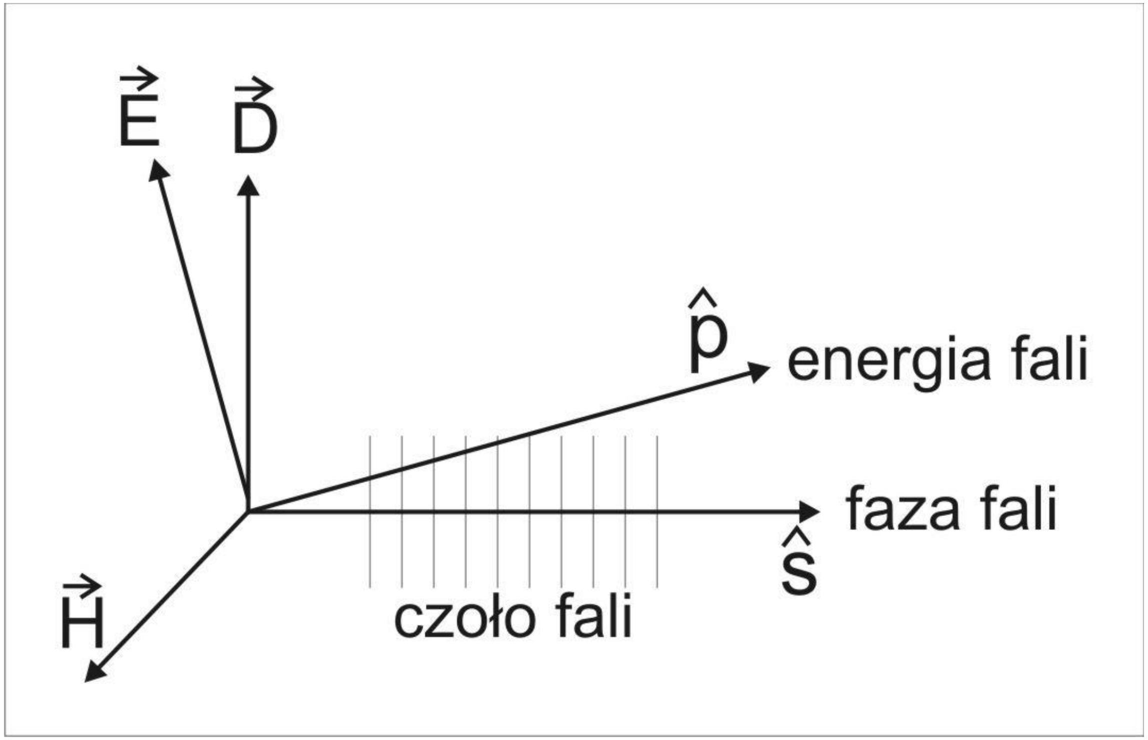
$$\vec{P} = \vec{E} \times \vec{H} = \left|\vec{P}\right| \hat{p}$$

$$\vec{E} \perp \hat{p}$$

$$\vec{H} \perp \hat{p}$$

$$\vec{H} \perp \vec{E}$$

$$\vec{H} \perp \hat{s}, \hat{p}, \vec{D}, \vec{E}$$



Ośrodki liniowo dwójłomne - spostrzeżenia

Fala płaska jest w ośrodku liniowo dwójłomnym (w tym izotropowym) fala poprzeczną.

$$\vec{D} \perp \hat{s} \quad \vec{H}, \vec{B} \perp \hat{s}$$

Wektory $\hat{s}, \vec{D}, \vec{H}$ są wzajemnie prostopadłe do siebie.

Wektory $\hat{p}, \vec{E}, \vec{H}$ są wzajemnie prostopadłe do siebie.

Wektory $\hat{s}, \hat{p}, \vec{D}, \vec{E}$ leżą w jednej płaszczyźnie, prostopadłej do wektora $\vec{H}$.

Kierunek wektora $\vec{E}$ na ogół nie pokrywa się z kierunkiem wektora $\vec{D}$.

$$\hat{E} \neq \hat{D}$$

Kierunek wersora $\hat{p}$ w ogólności nie pokrywa się z kierunkiem wersora $\hat{s}$ propagacji fazy fali.

$$\hat{p} \neq \hat{s}$$

Kierunek propagacji energii w ogólności nie pokrywa się z kierunkiem propagacji fazy fali.

Elipsa stanu polaryzacji światła

Założenie: fala płaska rozchodzi się w kierunku osi Z

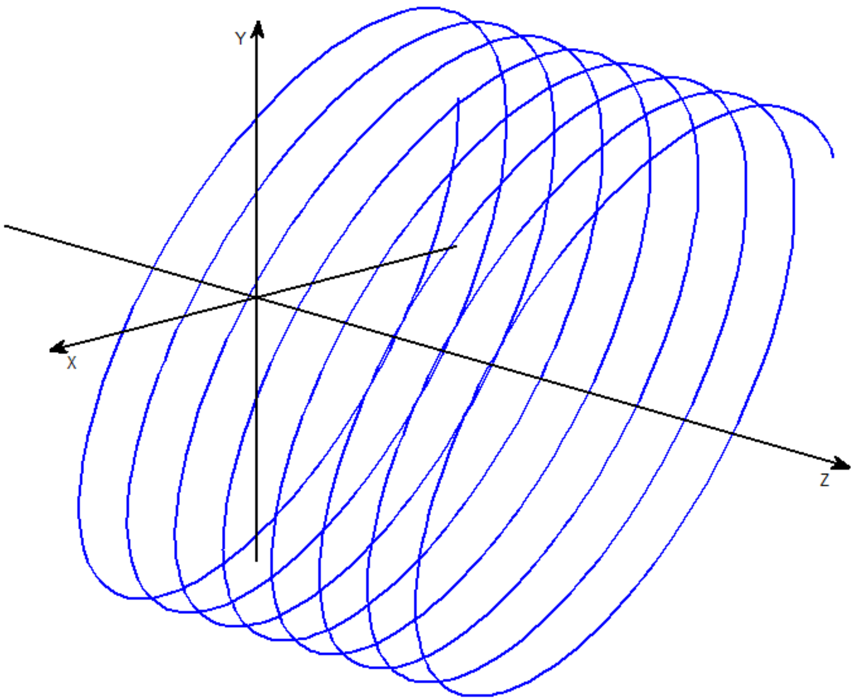
$$\vec{\mathcal{E}} \equiv \begin{bmatrix} e_x \\ e_y \\ e_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_x \\ E_y \\ 0 \end{bmatrix} \exp[i(\omega t - kz)] = \begin{bmatrix} A_x \exp(i\delta_x) \\ A_y \exp(i\delta_y) \\ 0 \end{bmatrix} \exp[i(\omega t - kz)]$$

$$\exp(i\varphi) \to \cos\varphi \qquad \delta = \delta_y - \delta_x$$

t=0 lub *z=0*

$$\begin{cases} e_x = A_x \cos(kz) \\ e_y = A_y \cos(kz - \delta) \end{cases} \quad \text{lub} \quad \begin{cases} e_x = A_x \cos(\omega t) \\ e_y = A_y \cos(\omega t - \delta) \end{cases}$$

Helisa- ewolucja wektora elektrycznego



$$\begin{cases} e_x = A_x \cos(\omega t - kz) \\ e_y = A_y \cos(\omega t - kz - \delta) \end{cases}$$

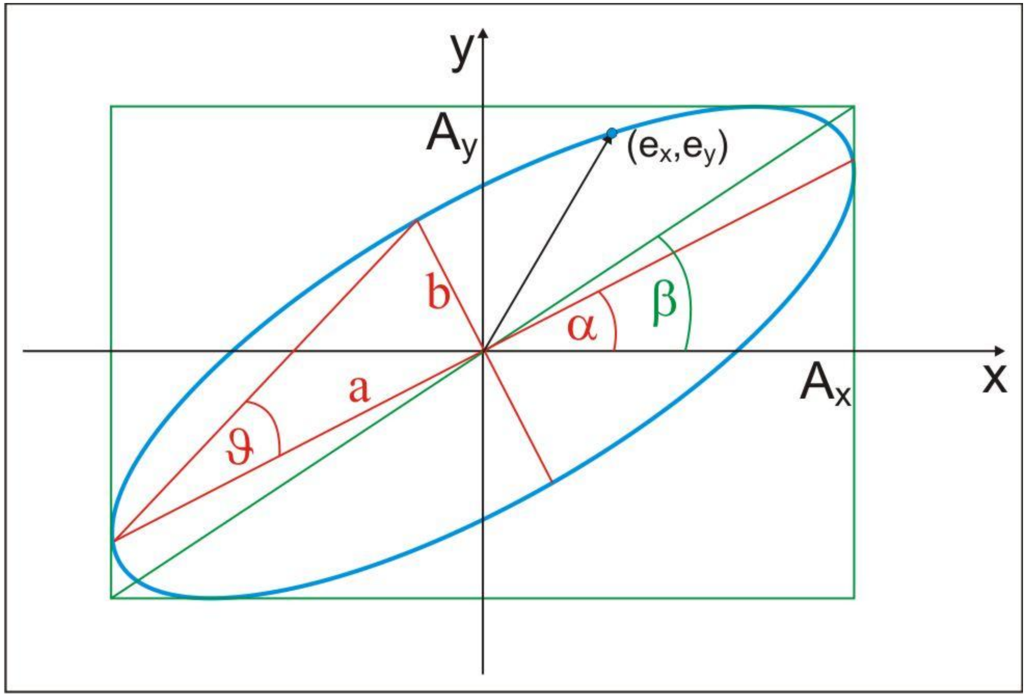
Dwa spojrzenia na helisę:

- propagacja w czasie jednego wektora elektrycznego fali (animacja)
- zamrożony w czasie zbiór wszystkich wektorów elektrycznych fali

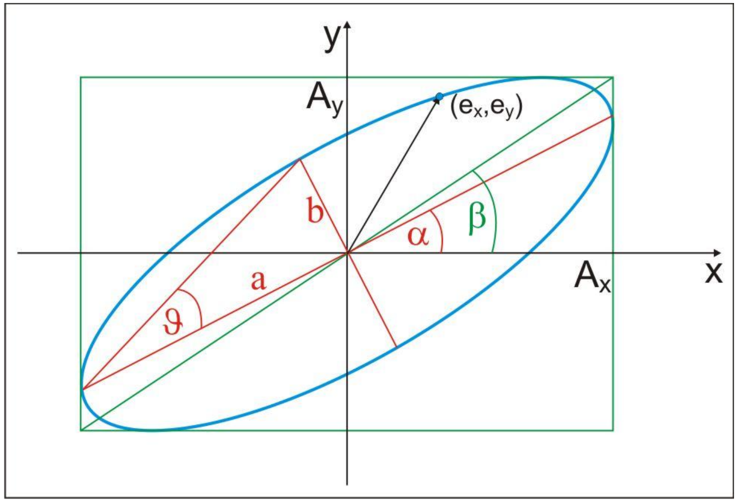
Elipsa stanu polaryzacji światła jako rzut helisy

Rzut: na płaszczyznę prostopadłą do kierunku propagacji fali

$$\left(\frac{e_x}{A_x}\right)^2 - \frac{2e_x e_y}{A_x A_y}\cos\delta + \left(\frac{e_y}{A_y}\right)^2 = \sin^2\delta$$



Wielkości opisujące stan polaryzacji światła



-kąt przekątnej β - kąt fazowy δ

-kąt azymutu α - kąt eliptyczności ϑ

-eliptyczność e - skrętność ±

$$\tan\beta = A_y / A_x \qquad e = b/a \qquad \tan\vartheta = e$$

Wartości własne i wektory własne

$$\begin{cases} n\hat{s}\times\vec{E} = \mu c\vec{H} \\ n\hat{s}\times\vec{H} = -c\bar{\varepsilon}\vec{E} \end{cases}$$

Znane: $\hat{s}, \bar{\varepsilon}$

Nieznane: $n, \vec{E}$

$$n^2\hat{s}\times\left(\hat{s}\times\vec{E}\right) + c^2\mu\bar{\varepsilon}\vec{E} = 0$$

$$\begin{bmatrix} n_x^2 - n^2\left(1-s_x^2\right) & n^2 s_x s_y & n^2 s_x s_z \\ n^2 s_x s_y & n_y^2 - n^2\left(1-s_y^2\right) & n^2 s_y s_z \\ n^2 s_x s_z & n^2 s_y s_z & n_z^2 - n^2\left(1-s_z^2\right) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{bmatrix} = 0$$

Równania Fresnela normalnych

$$\det\begin{vmatrix} n_x^2 - n^2\left(1 - s_x^2\right) & n^2 s_x s_y & n^2 s_x s_z \\ n^2 s_x s_y & n_y^2 - n^2\left(1 - s_y^2\right) & n^2 s_y s_z \\ n^2 s_x s_z & n^2 s_y s_z & n_z^2 - n^2\left(1 - s_z^2\right) \end{vmatrix} = 0$$

$$\frac{s_x^2}{\frac{1}{n^2} - \frac{1}{n_x^2}} + \frac{s_y^2}{\frac{1}{n^2} - \frac{1}{n_y^2}} + \frac{s_z^2}{\frac{1}{n^2} - \frac{1}{n_z^2}} = 0$$

$$\frac{s_x^2}{n^2 - n_x^2} + \frac{s_y^2}{n^2 - n_y^2} + \frac{s_z^2}{n^2 - n_z^2} = \frac{1}{n^2}$$

Dwa rozwiązania równań Fresnela

$$n^4 - An^2 + B = 0$$

$$A = \frac{s_x^2 \varepsilon_x \left(\varepsilon_y + \varepsilon_z\right) + s_y^2 \varepsilon_y \left(\varepsilon_x + \varepsilon_z\right) + s_z^2 \varepsilon_z \left(\varepsilon_x + \varepsilon_y\right)}{s_x^2 \varepsilon_x + s_y^2 \varepsilon_y + s_z^2 \varepsilon_z}$$

$$B = \frac{\varepsilon_x \varepsilon_y \varepsilon_z}{s_x^2 \varepsilon_x + s_y^2 \varepsilon_y + s_z^2 \varepsilon_z}$$

Wniosek: w krysztale liniowo dwójłomnym mogą się w danym kierunku rozchodzić co najwyżej **dwie** fale z dwiema różnymi prędkościami fazowymi.

Definicja dwójłomności $\Delta n \equiv \left| n_2 - n_1 \right| = n_s - n_f$