

Polaryzacja i ośrodki dwójłomne

Część I

Wektorowy opis fali elektromagnetycznej

$\vec{E}(\vec{r}, t)$ -wektor natężenia pola elektrycznego

$\vec{H}(\vec{r}, t)$ -wektor natężenia pola magnetycznego

$\vec{D}(\vec{r}, t)$ -wektor indukcji dielektrycznej

$\vec{B}(\vec{r}, t)$ -wektor indukcji magnetycznej

Wektory te, których współrzędne zależą od położenia i czasu, powiązane są ze sobą równaniami Maxwella.

Ośrodki izotropowe i anizotropowe

- równania materiałowe

ośrodki izotropowe

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \varepsilon \vec{E} \qquad \varepsilon = n^2 \qquad \bar{\varepsilon} = \begin{pmatrix} n^2 & 0 & 0 \\ 0 & n^2 & 0 \\ 0 & 0 & n^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon \end{pmatrix}$$

ośrodki liniowo dwójtome

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \varepsilon \vec{E} \qquad \varepsilon = \begin{pmatrix} n_x^2 & 0 & 0 \\ 0 & n_y^2 & 0 \\ 0 & 0 & n_z^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon_x & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_y & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_z \end{pmatrix}$$

Fale płaskie w ośrodku anizotropowym

Płaska fala świetlna

$$\begin{cases} \vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E} \exp[i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})] \\ \vec{H}(\vec{r}, t) = \vec{H} \exp[i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})] \end{cases}$$

gdzie $\vec{k} = \omega \frac{n}{c} \hat{s} = \frac{\omega}{V} \hat{s} \quad V = \frac{c}{n} \quad |\vec{k}| = k = \frac{2\pi}{\lambda}$

Co jest znane?

- długość fali λ
- kierunek propagacji fali $\hat{s}$
- kryształ $\vec{\epsilon} = \epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_z$

Co jest nieznane?

- ile jest fal w danym kierunku $\hat{s}$?
- jakie są ich prędkości, czyli n ?
- jaka jest ich amplituda $\vec{E} = (E_x, E_y, E_z)$

Ośrodki liniowo dwójtłomne

$$\vec{D} \perp \hat{s} \quad \vec{D} \perp \vec{H} \quad \vec{H} \perp \hat{s}$$

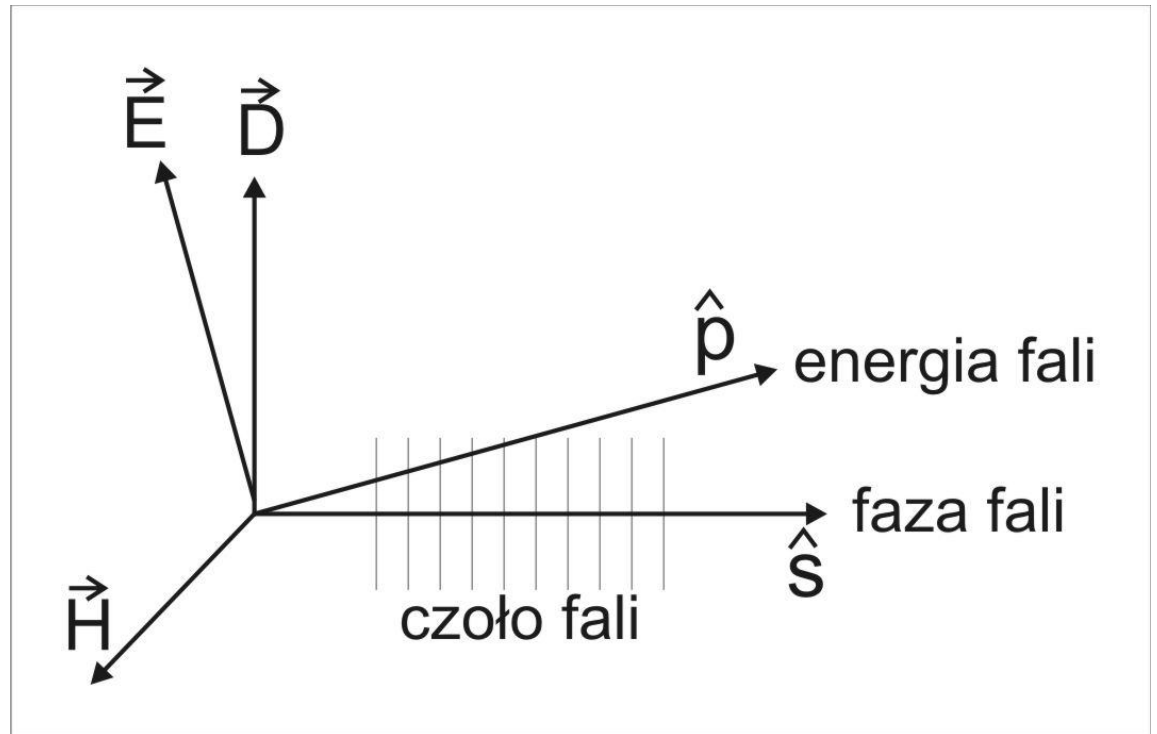
$$\vec{P} = \vec{E} \times \vec{H} = |\vec{P}| \hat{p}$$

$$\vec{E} \perp \hat{p}$$

$$\vec{H} \perp \hat{p}$$

$$\vec{H} \perp \vec{E}$$

$$\vec{H} \perp \hat{s}, \hat{p}, \vec{D}, \vec{E}$$



Elipsa stanu polaryzacji światła

Założenie: fala płaska rozchodzi się w kierunku osi Z

$$\vec{E} \equiv \begin{bmatrix} e_x \\ e_y \\ e_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_x \\ E_y \\ 0 \end{bmatrix} \exp \left[i(\omega t - kz) \right] = \begin{bmatrix} A_x \exp(i\delta_x) \\ A_y \exp(i\delta_y) \\ 0 \end{bmatrix} \exp \left[i(\omega t - kz) \right]$$

$$\exp(i\varphi) \rightarrow \cos \varphi \quad \delta = \delta_y - \delta_x$$

$t=0$

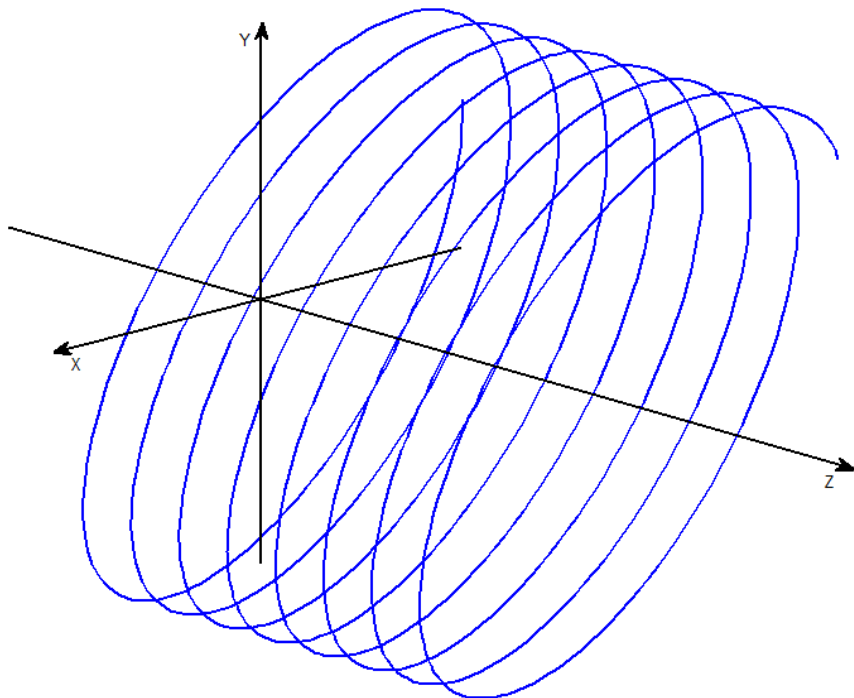
lub

$z=0$

$$\begin{cases} e_x = A_x \cos(kz) \\ e_y = A_y \cos(kz - \delta) \end{cases} \quad \text{lub}$$

$$\begin{cases} e_x = A_x \cos(\omega t) \\ e_y = A_y \cos(\omega t - \delta) \end{cases}$$

Helisa- ewolucja wektora elektrycznego



$$\begin{cases} e_x = A_x \cos(\omega t - kz) \\ e_y = A_y \cos(\omega t - kz - \delta) \end{cases}$$

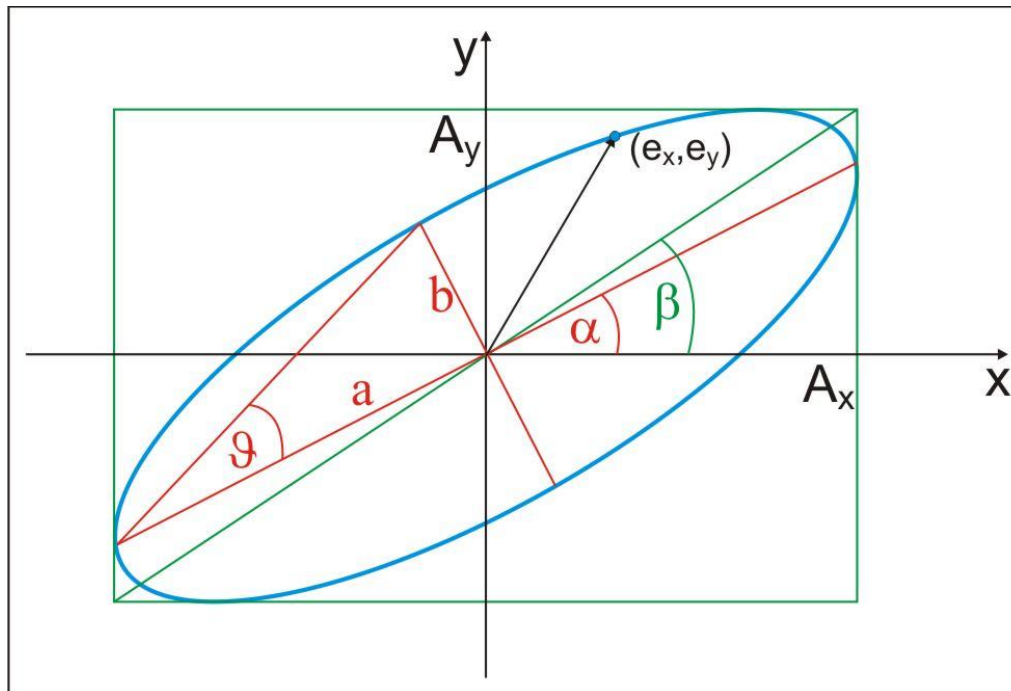
Dwa spojrzenia na helisę:

- propagacja w czasie jednego wektora elektrycznego fali (animacja)
- zamrożony w czasie zbiór wszystkich wektorów elektrycznych fali

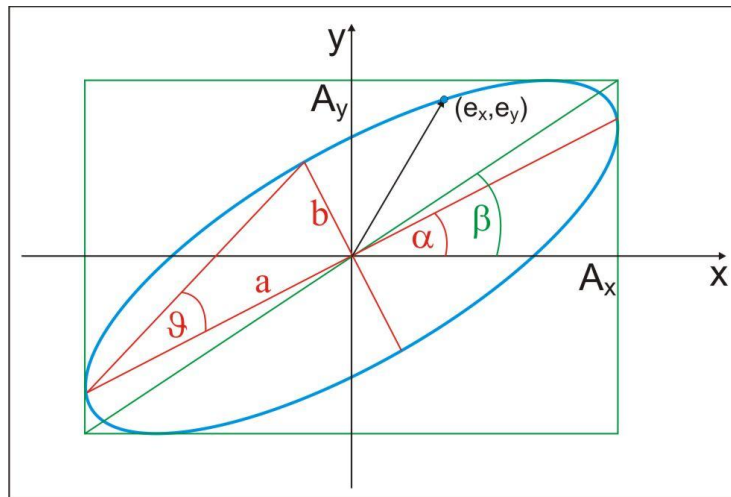
Elipsa stanu polaryzacji światła jako rzut helisy

Rzut: na płaszczyznę prostopadłą do kierunku propagacji fali

$$\left(\frac{e_x}{A_x}\right)^2 - \frac{2e_x e_y}{A_x A_y} \cos \delta + \left(\frac{e_y}{A_y}\right)^2 = \sin^2 \delta$$



Wielkości opisujące stan polaryzacji światła



- kąt przekątnej β
- kąt fazowy δ
- kąt azymutu α
- kąt eliptyczności ϑ
- eliptyczność e
- skrętność $\pm$

$$\tan \beta = A_y / A_x \quad e = b/a \quad \tan \vartheta = e$$

Wektorowe opisy stanu polaryzacji światła

Wektor Jonesa

$$\vec{E} \equiv \begin{bmatrix} e_x \\ e_y \\ e_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_x \\ E_y \\ 0 \end{bmatrix} \exp[i\omega t - kz] = \begin{bmatrix} A_x \exp(i\delta_x) \\ A_y \exp(i\delta_y) \\ 0 \end{bmatrix} \exp[i\omega t - kz]$$

wektor Jonesa

$$\mathbf{E} \equiv \begin{bmatrix} A_x e^{i\delta_x} \\ A_y e^{i\delta_y} \end{bmatrix}$$

postać uproszczona

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} A_x \\ A_y e^{i\delta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_x e^{-i\delta} \\ A_y \end{bmatrix}$$

standardowy wektor Jonesa

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} \cos \beta \\ \sin \beta e^{i\delta} \end{bmatrix}$$

Wektorowe opisy stanu polaryzacji światła

Wektor Jonesa

obliczanie natężenia oraz stanu polaryzacji światła

$$\mathbf{E} \equiv \begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \end{bmatrix} = a \begin{bmatrix} \cos \beta \\ \sin \beta e^{i\delta} \end{bmatrix}$$

natężenie

$$I = E_1 E_1^* + E_2 E_2^* = a a^*$$

$$\frac{E_2}{E_1} = \tan \beta \cos \delta + i \tan \beta \sin \delta$$

$$\tan \delta = \frac{\operatorname{Im}\left(\frac{E_2}{E_1}\right)}{\operatorname{Re}\left(\frac{E_2}{E_1}\right)} \qquad \tan \beta = \frac{\operatorname{Re}\left(\frac{E_2}{E_1}\right)}{\cos \delta} = \frac{\operatorname{Im}\left(\frac{E_2}{E_1}\right)}{\sin \delta}$$

Wektorowe opisy stanu polaryzacji światła

Wektor Stokesa

$$V \equiv \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ V_4 \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} \langle e_x^2 \rangle + \langle e_y^2 \rangle \\ \langle e_x^2 \rangle - \langle e_y^2 \rangle \\ \langle 2e_x e_y \cos \delta \rangle \\ \langle 2e_x e_y \sin \delta \rangle \end{bmatrix}$$

Światło niespolaryzowane

$$V = \begin{bmatrix} I \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = I \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

I - natężenie
światła

Światło całkowicie spolaryzowane

$$V = I \begin{bmatrix} 1 \\ M \\ C \\ S \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} M &= \cos 2\alpha \cos 2\vartheta \\ C &= \sin 2\alpha \cos 2\vartheta \\ S &= \sin 2\vartheta \end{aligned}$$

Wektorowe opisy stanu polaryzacji światła

Wektor Stokesa

Dla światła częściowo spolaryzowanego

$$V = \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ V_4 \end{bmatrix} = I_s \begin{bmatrix} 1 \\ M \\ C \\ S \end{bmatrix} + I_n \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_s + I_n \\ I_s M \\ I_s C \\ I_s S \end{bmatrix}$$

stopień polaryzacji światła $p = \frac{I_s}{I}$

$$V = I \begin{bmatrix} 1 \\ pM \\ pC \\ pS \end{bmatrix} = I \begin{bmatrix} 1 \\ p \cos 2\vartheta \cos 2\alpha \\ p \cos 2\vartheta \sin 2\alpha \\ p \sin 2\vartheta \end{bmatrix}$$

Wektorowe opisy stanu polaryzacji światła

Wektor Stokesa

Obliczanie właściwości światła

natężenie

$$I = V_1$$

stopień polaryzacji

$$p = \frac{\sqrt{V_2^2 + V_3^2 + V_4^2}}{V_1}$$

kąt azymutu

$$\tan 2\alpha = \frac{V_3}{V_2}$$

kąt eliptyczności

$$\sin 2\vartheta = \frac{V_4}{\sqrt{V_2^2 + V_3^2 + V_4^2}}$$

Wektorowe opisy stanu polaryzacji światła

Przykłady

Światło	Wektor Jonesa	Wektor Stokesa
Niespolaryzowane	-	(1,0,0,0)
Liniowo spolaryzowane poziomo	(1,0)	(1,1,0,0)
Liniowo spolaryzowane pionowo	(0,1)	(1,-1,0,0)
Liniowo spolaryzowane $\alpha=45^\circ$	(1,1)	(1,0,1,0)
Liniowo spolaryzowane $\alpha=45^\circ$	(1,-1)	(1,0,-1,0)
Kołowo spolaryzowane prawoskrętnie	(1,i)	(1,0,0,1)
Kołowo spolaryzowane lewoskrętnie	(1,-i)	(1,0,0,-1)

Fale własne ośrodka dwójłomnego

$$\operatorname{rot} \vec{H} - \dot{\vec{D}} = \sigma \vec{E} \quad \operatorname{div} \vec{D} = \rho$$

$$\operatorname{rot} \vec{E} + \dot{\vec{B}} = 0 \quad \operatorname{div} \vec{B} = 0$$

$$\varepsilon = \begin{pmatrix} n_x^2 & 0 & 0 \\ 0 & n_y^2 & 0 \\ 0 & 0 & n_z^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon_x & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_y & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_z \end{pmatrix}$$

Z równań Maxwella oraz równań materiałowych wynika, że w ośrodku anizotropowym mogą się W DANYM KIERUNKU rozchodzić dwie fale płaskie, różniące się prędkościami propagacji.

Cechy tych fal (dla ośrodków liniowo dwójłomnych):

- a) pierwsza z tych fal nazywana jest falą szybką ośrodka, druga – wolną,
- b) mają dwa różne współczynniki załamania n_f i n_s ,
- c) współczynniki załamania tych fal zależą w ogólnym przypadku od kierunku propagacji,
- d) fale te są liniowo spolaryzowane,
- e) kierunki drgań wektorów natężenia pola elektrycznego tych fal są wzajemnie prostopadłe,
- f) takie fale nazywamy ortogonalnymi,
- g) kierunki tych drgań są ściśle związane z orientacją kryształu (gdy kryształ jest obracany, zmieniają się kierunki drgań fal ortogonalnych)

Fale własne ośrodka dwójłomnego

Dwójłomność, różnica dróg optycznych, różnica faz,

Anizotropowa płytka płasko-równoległa o grubości d

Dwójłomność

$$\Delta n = n_s - n_f$$

Różnica dróg optycznych

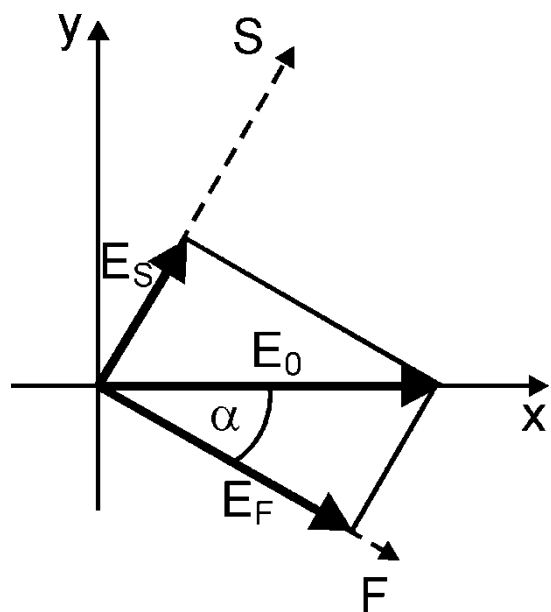
$$R = d(n_s - n_f) = d\Delta n$$

Różnica faz

$$\gamma = \frac{2\pi}{\lambda} R = \frac{2\pi}{\lambda} d\Delta n$$

Orientacja kryształu a natężenia fal własnych

Przykład: wejściowa fala – liniowo spolaryzowana poziomo
fale własne ośrodka – liniowo spolaryzowane



$$E_f = E_0 \cos \alpha$$

$$E_s = E_0 \sin \alpha$$

$$I_F = I_0 \cos^2 \alpha$$

$$I_S = I_0 \sin^2 \alpha$$

Gdy kąt azymutu ośrodka jest taki sam jak kąt azymutu fali szybkiej lub wolnej wówczas w ośrodku rozchodzi się tylko jedna fala (szybka lub wolna). W tym przypadku zatem nie ma zmiany stanu polaryzacji światła.

Zmiana stanu polaryzacji fali po przejściu przez ośrodek anizotropowy

Wektor Jonesa fali eliptycznie spolaryzowanej
jako suma dwóch wektorów Jonesa fal liniowo spolaryzowanych

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} \cos \beta \\ \sin \beta e^{i\delta} \end{bmatrix} = \cos \beta \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \sin \beta \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} e^{i\delta}$$

Dwie fale liniowo spolaryzowane, ortogonalne względem siebie i przesunięte w fazie,
za ośrodkiem dwójłomnym dodają się tworząc falę eliptycznie spolaryzowaną.

Wektor Jonesa fali za ośrodkiem liniowo dwójłomnym
(padająca fala liniowo spolaryzowana)

$$\mathbf{E}' = \begin{bmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha e^{i\gamma} \end{bmatrix}$$

Fale własne ośrodka jednoosiowego

$$n_x = n_y \neq n_z \quad \bar{\varepsilon} = \begin{pmatrix} n_x^2 & 0 & 0 \\ 0 & n_x^2 & 0 \\ 0 & 0 & n_z^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon_x & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_x & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_z \end{pmatrix}$$

W ośrodku tym rozchodzą się dwie fale: zwyczajna i nadzwyczajna

Właściwości fal

zwyczajna	nadzwyczajna
Współczynnik załamania nie zależy od kierunku propagacji	Współczynnik załamania zależy od kierunku propagacji
Kierunek propagacji czoła fali pokrywa się z kierunkiem propagacji energii	Kierunek propagacji czoła fali nie pokrywa się z kierunkiem propagacji energii

$$\vec{D}_o \parallel \vec{E}_o \Leftrightarrow \hat{s}_o = \vec{p}_o$$

$$\vec{D}_e \neq \vec{E}_e \Leftrightarrow \hat{s}_e \neq \vec{p}_e$$

$$n_o = n_x = n_y$$

$$n_e = \left(\frac{\cos^2 \theta}{n_x^2} + \frac{\sin^2 \theta}{n_z^2} \right)^{-1/2}$$

$$n_o = n_x = n_y$$

$$n_y \leq n_e \leq n_z$$

Fale własne ośrodka jednoosiowego

Oś binormalna, oś optyczna

$$n_o = n_x = n_y \quad n_e = \left(\frac{\cos^2 \theta}{n_x^2} + \frac{\sin^2 \theta}{n_z^2} \right)^{-1/2}$$

$$\theta = 0^\circ \Rightarrow n_e = n_x \Rightarrow \Delta n = n_e - n_o = 0$$

$$\theta = 90^\circ \Rightarrow n_e = n_z \Rightarrow \Delta n = n_e - n_o = |n_z - n_x| = \max$$

Dwójłomność zmienia się od minimalnej, równej zero, do maksymalnej, gdy kierunek propagacji fal zmienia się od równoległego do osi Z do prostopadłego.

Oś binormalna – taki kierunek propagacji fali w kryształach, w którym znika dwójłomność liniowa.

Oś optyczna – oś binormalna kryształu jednoosiowego

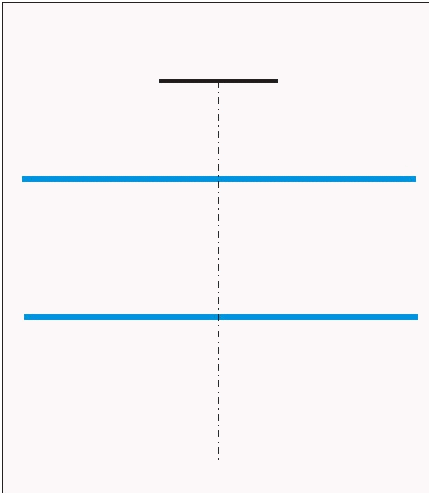
Prostopadłe padanie fali na płytkę kryształu jednoosiowego

oś optyczna kryształu

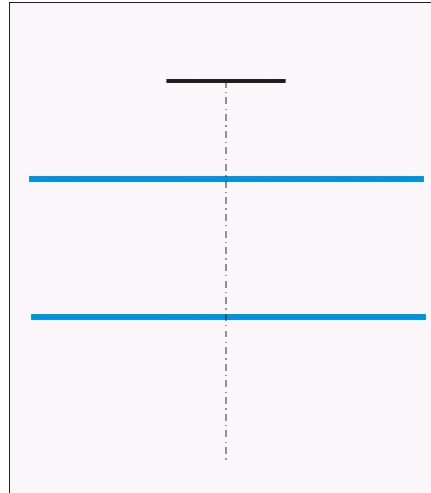
równoległa

skośna

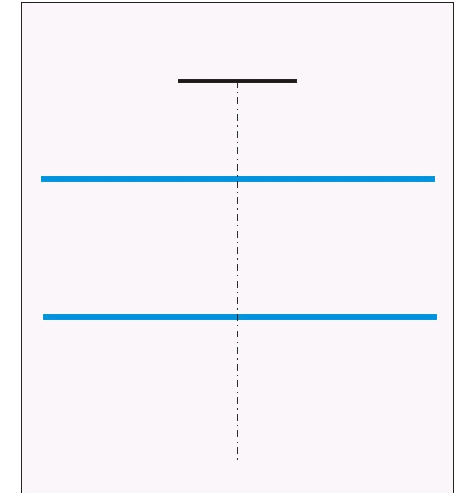
prostopadła



rozsuniecie podłużne: **NIE**
rozsuniecie poprzeczne: **NIE**
dwójłomność: **NIE**



rozsuniecie podłużne: **TAK**
rozsuniecie poprzeczne: **TAK**
dwójłomność: **TAK**



rozsuniecie podłużne: **TAK**
rozsuniecie poprzeczne: **NIE**
dwójłomność: **TAK**

Odbicie i załamanie na granicy ośrodek jednoosiowy - ośrodek jednoosiowy

Prawo Snella:

- spełnione dla obu fal, zwyczajnej i nadzwyczajnej
- niespełnione dla promienia nadzwyczajnego !
powyższe uwagi dotyczą zarówno odbicia jak i załamania

Fale własne ośrodka dwuosiowego

$$n_x < n_y < n_z \quad \bar{\varepsilon} = \begin{pmatrix} n_x^2 & 0 & 0 \\ 0 & n_y^2 & 0 \\ 0 & 0 & n_z^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon_x & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_y & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_z \end{pmatrix}$$

$$\Delta n = 0 \Leftrightarrow \tan \theta_B = \pm \frac{n_z}{n_x} \sqrt{\frac{n_y^2 - n_x^2}{n_z^2 - n_y^2}}$$

Dwie osi binormalne – dwa kierunki, w których znika dwójłomność

W ośrodku dwuosiowym obie fale są falami nadzwyczajnymi.

Polaryskop

Polaryskop – przyrząd służący do obserwacji/rejestracji właściwości dwójłomnych ośrodka, dzięki zmianie stanu polaryzacji światła po przejściu przez ośrodek.

Polaryskop składa się z:

- a) polaryzatora,
- b) jednej lub więcej płytek dwójłomnych,
- c) analizatora.

Po co jest polaryzator?

Po co jest analizator?

Wektor Jonesa fali za ośrodkiem liniowo dwójłomnym
(padająca fala liniowo spolaryzowana)

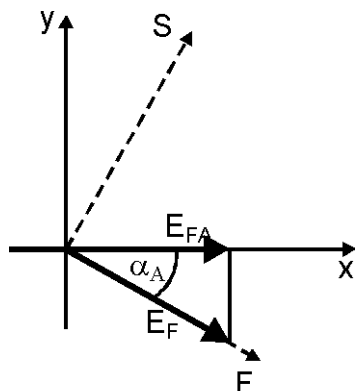
$$\mathbf{E}' = \mathbf{E}_0 \begin{bmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha e^{i\gamma} \end{bmatrix}$$

Natężenie

$$I' = I_0$$

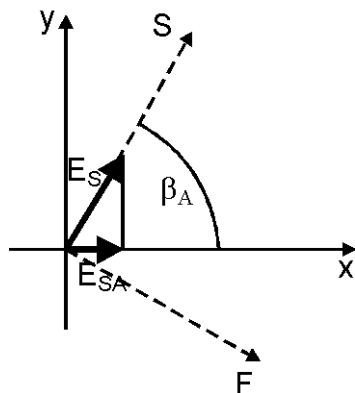
W natężeniu światła wyjściowego nie ma informacji o badanym obiekcie.

Natężenie światła za analizatorem



Na analizator A padają dwie fale, F i S, przesunięte w fazie względem siebie.

Przez analizator A przechodzą tylko te składowe fal F i S, które są zgodne z kierunkiem przepuszczania (kątem azymutu) analizatora.



Za analizatorem:

$$\vec{E}_A = \vec{E}_{SA} + \vec{E}_{FA} \exp(i\gamma)$$

$$I_A = I_{SA} + I_{FA} + 2\sqrt{I_{FA}I_{SA}} \cos \gamma$$

Interferencja!

Polaryskop liniowy skrzyżowany

Polaryzator – pod kątem azymutu 0°

Obiekt liniowo dwójłomny pod kątem azymutu α i o różnicy faz γ

Analizator - pod kątem azymutu 90°

$$I_{out} \propto I_0 \cdot \sin^2 2\alpha \cdot \sin^2 \frac{\gamma}{2}$$

Ośrodek jednorodny – pryzmat Wollastona

Ośrodki niejednorodne



Kompensatory

Kompensator – przyrząd służący do pomiaru różnicy faz ośrodka dwójłomnego, w którym wykorzystano metodę kompensacji.

